TALLER DEL CENTRO DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Series Infinitas de Números y Funciones

Guillermo Romero Meléndez
Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

- **1. SERIES DE NÚMEROS**

- **La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$**

  es convergente si la sucesión:

  $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

  tiene límite L cuando n $\to \infty$,

  y en este caso se escribe:

  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$

  y se dice que L es la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- **1.1 CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE SERIES**

  En esta sección enunciaremos los principales criterios de convergencia de las series de números y en la siguiente sección daremos ejemplos, siguiendo el orden que se aconseja usar en los ejercicios.

  a) Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $a_n \to 0$.

  ¿Cómo se usa? Se calcula $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ y si $L \neq 0$, la serie diverge.

  b) Series cuya suma o convergencia se conoce.

b1) La serie geométrica:

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$

converge si y sólo si -1 < r < 1, y en este caso $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$

b2) La serie p:

$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n^p = 1 + 1/2^p + 1/3^p + \ldots + 1/n^p + \ldots$

converge si y sólo si p > 1.

c) Criterios de comparación.

Se construye una nueva serie, con los términos dominantes de la serie original, y cuya convergencia se conozca (por ser una serie geométrica o una serie p, o una serie cuyo término a_n **no tiende a 0).**

c1) Criterio básico de comparación.

Si $\sum a_n$ **y** $\sum b_n$ **son series de términos no negativos, se tiene:**

i) $a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ **es convergente** $\Rightarrow \sum a_n$ **es convergente.**

ii) $a_n \leq b_n$ y $\sum a_n$ **es divergente** $\Rightarrow \sum b_n$ **es divergente.**

c2) Criterio de comparación del límite.

Si $\sum a_n$ **y** $\sum b_n$ **son series de términos positivos, se tiene:**

Si $a_n / b_n \to L > 0$**, ambas series** $\sum a_n$ **y** $\sum b_n$ **convergen, o ambas divergen.**

d) Prueba de la Integral.

- **Se utiliza cuando una parte del término** a_n **es la derivada de otra parte de ese término.**

Si f(x) es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ **y** $a_n = f(n)$**, entonces:**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** $\Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\, dx$ **converge.**

e) Convergencia Absoluta

$\sum |a_n|$ **converge** $\Rightarrow \sum a_n$ **converge**

f) Criterio de Leibniz

Si a_n es decreciente y $a_n \to 0$, entonces $\sum (-1)^n a_n$ converge

g) Criterio de la Razón.

Si $| a_{n+1} | / | a_n | \to L$, se tiene:

i) $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ es absolutamente convergente.

ii) $L > 1$ o $L = \infty \Rightarrow \sum a_n$ es divergente.

h) Criterio de la Raíz.

Si $\sqrt[n]{| a_n |} \to L$, se tiene:

i) $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ es absolutamente convergente.

ii) $L > 1$ o $L = \infty \Rightarrow \sum a_n$ es divergente.

1.2 EJEMPLOS

En esta sección presentaremos ejemplos de la aplicación de los criterios anteriores.

EJEMPLO 1: Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Sin}(1/n)$

Solución:

La comparamos con la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n$, la cual es una p serie, con p =1 y por lo tanto diverge. Utilizamos el criterio de convergencia del límite:

$$\lim_{n \to \infty} a_n / b_n = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Sin}(1/n) / (1/n) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Cos}(1/n) \left(-1/n^2\right) / \left(-1/n^2\right) =$$

$$\mathrm{Cos}(0) = 1 > 0,$$

por lo tanto ambas series divergen.

EJEMPLO 2: Determinar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n)^{n^2}$

Solución:

Utilicemos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{(1 - 1/n)^{n^2}} = \lim_{n \to \infty} (1 - 1/n)^n = e^{-1} < 1$$

por lo tanto la serie converge.

■ 2. SERIES DE FUNCIONES (SERIES DE POTENCIAS)

■ **Las series de potencias son de la forma:**

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x-a)^2 + \ldots + c_n (x-a)^n + \ldots$

y en general convergen en un intervalo (a - R , a + R), y al número R se le llama radio de convergencia.

Se demuestra que si una función f(x) se representa como una serie de potencias, entonces:

$c_n = f^{(n)}(a)/ n!$

La serie obtenida: $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) / n! \; (x-a)^n$ **se llama Serie de Taylor de f(x) en a, y si a = 0**

la serie de potencias se llama Serie de Mac Laurin de f(x).

Si la suma en la serie de Taylor llega solamente hasta la potencia n, se llama Polinomio de Taylor y se denota por T_n (x):

$T_n (x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) / 2! \; (x-a)^2 + \ldots + f^{(n)}(a) / n! \; (x-a)^n$

A la diferencia de f(x) y T_n (x) se le llama Residuo de la Serie de Taylor y se denota por R_n (x):

$R_n (x) = f(x) - T_n (x).$

Si R_n (x) → 0, cuando n →∞, para x en (a-R, a+R), el intervalo de convergencia de la series, entonces la función es igual a su serie de Taylor en ese intervalo.

Un desigualdad útil para probar esto último es la Desigualdad de Taylor:

$| R_n(x)| \leq M / (n+1)! \, | x-a |^{n+1}$**, con M un número que cumple:** $| f^{(n+1)}(x)| \leq M$**, para x en (a-R, a+R).**

Las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia.

■ 2.1 EJEMPLOS

En esta sección presentaremos ejemplos de series de Taylor y de Mac Laurin.

EJEMPLO 3: Calcular la serie de Taylor de la función: f(x) = 1/x = x^{-1}, en a = 2. Calcular su radio de convergencia.

Solución:
f(a) = 1/2 = 2^{-1}
f´(x) = - x^{-2} , f´(a) = - 2^{-2}
f´´(x) = 2 x^{-3} , f´´(a) = $2 \bullet 2^{-3}$
f´´´(x) = $-2 \bullet 3\, x^{-4}$, f´´´(a) = $-2 \bullet 3 \bullet 2^{-4}$
...
$f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)}$, $f^{(n)}(2) = (-1)^n\, n!\, 2^{-(n+1)}$

y la serie de Taylor es: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 2^{-(n+1)}\, (x-2)^n$

Para calcular el radio de convergencia, utilizamos el criterio de la raíz:

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2^{-(n+1)}\, |x-2|^n}$ = |x-2| / (2 $\sqrt[n]{2}$) → |x-2| / 2 < 1, si |x-2| < 2. R =2.

EJEMPLO 4: Expresar como serie de potencias la función: (1 + x)/ $(1-x)^2$ y calcular su radio de convergencia.

Solución:

Sabemos de la serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ = 1/(1-x) = $(1-x)^{-1}$, si |x| < 1. Derivando con respecto a x obtenemos:

1/$(1-x)^2$ = $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$ por lo tanto: (1+x)/$(1-x)^2$ = (1+x) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$ + x $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$ =

(1+ 2 x + 3 x^2 + 4 x^3 + ...) + (x + 2 x^2 + 3 x^3+ ...) = 1 + 3 x + 5 x^2 + 7 x^3 + ... = $\sum_{n=0}^{\infty} (2\,n+1)\, x^n$, si |x| < 1, R =1

```
Series[(1 + x) / (1 - x)^2, {x, 0, 10}]
```

$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + 11x^5 + 13x^6 + 15x^7 + 17x^8 + 19x^9 + 21x^{10} + O[x]^{11}$