TALLER DEL CENTRO DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Integrales Múltiples

Guillermo Romero Meléndez
Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

- **1. INTEGRALES DOBLES**

- **1.1 INTEGRALES DOBLES DE FUNCIONES DEFINIDAS EN RECTÁNGULOS (TEOREMA DE FUBINI)**

Si f(x,y) está definida sobre el rectángulo Q = [a,b] × [c,d], se tiene:

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

- **1.2 INTEGRALES DOBLES DE FUNCIONES DEFINIDAS EN REGIONES DE TIPO I Y II**

Si f(x,y) está definida sobre la región: R = {(x,y)| a≤x≤b, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$}, se tiene:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Si f(x,y) está definida sobre la región: R = {(x,y)| c≤y≤d, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$}, se tiene:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

- **1.3 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES**

Si f(x,y) está definida sobre una región R, determinada en coordenadas polares por las desigualdades: a≤r≤b, $\alpha \le \theta \le \beta$, se tiene:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))\, r\, d\theta \right) dr$$

1.4 FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES DOBLES

Si T= (x(u,v),y(u,v)) transforma una región S en el plano uv en la región R del plano xy, entonces se tiene:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

con el Jacobiano de T, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$**, las derivadas parciales son continuas y al función T es 1-1, excepto en conjuntos de área 0.**

1.5 EJEMPLO

EJEMPLO 1: Calcular la integral:

$$\int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)\, dy \right) dx$$

Solución:

La región donde está definida la función es: $0 \leq x \leq 3$, $-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$.

Como $y = \pm\sqrt{9-x^2}$ es la circunferencia: $x^2 + y^2 = 3^2$ con centro (0,0) y radio 3, la región es la mitad derecha del disco con centro (0,0) y radio 3 definida por: $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 3$.

Escribiendo la integral en coordenadas polares obtenemos:

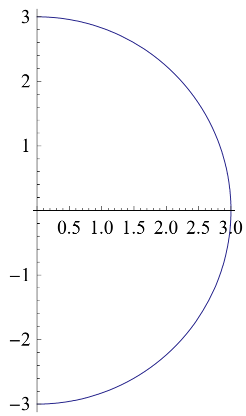
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^3 (r^3 \text{Cos}^3(\theta) + r\,\text{Cos}(\theta)\, r^2\, \text{Sen}^2(\theta))\, r\, dr \right) d\theta$$

La integral con respecto a r es:

$$\int_0^3 r^4 \text{Cos}(\theta) (\text{Cos}^2(\theta) + \text{Sen}^2(\theta))\, dr = \int_0^3 r^4 \text{Cos}(\theta)\, dr = \text{Cos}(\theta) \left(\frac{r^5}{5} \Big|_0^3\right) = \frac{3^5}{5}\, \text{Cos}(\theta).$$

por lo tanto obtenemos:

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3^5}{5}\ \text{Cos}(\theta)\ d\theta = \frac{3^5}{5}\ \left(\text{Sen}(\theta)\ |_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = \frac{3^5}{5}\ 2 = 486/5.$



2. INTEGRALES TRIPLES

2.1 INTEGRALES TRIPLES DE FUNCIONES DEFINIDAS EN CAJAS (TEOREMA DE FUBINI)

Si f(x,y,z) está definida sobre la caja R = [a,b] × [c,d] × [r,s], se tiene:

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

2.2 INTEGRALES TRIPLES DE FUNCIONES DEFINIDAS EN REGIONES DE TIPO I Y II

Si f(x,y,z) está definida sobre la región:
R = {(x,y)| a≤x≤b, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $\psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)$}, se tiene:

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

2.3 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Si f(x,y,z) está definida sobre una región R, determinada en coordenadas cilíndricas por las desigualdades: a≤r≤b, $\alpha \le \theta \le \beta$, c≤z≤d, se tiene:

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_c^d f(r \cos(\theta), r\, \text{sen}(\theta), z) \right) r\, dz \right) d\theta \right) dr$$

2.4 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Si f(x,y,z) está definida sobre una región R, determinada en coordenadas esféricas por las desigualdades: a≤ρ≤b, α≤θ≤β, c≤φ≤d, se tiene:

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta\left(\int_c^d f(r\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\varphi))\right)\rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\, d\varphi\right) d\theta\right) d\rho$$

2.5 FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES TRIPLES

Si T= (x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) transforma una región S en el plano uvw en la región R del plano xyz, entonces se tiene:

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$$

con el Jacobiano de T: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ **≠ 0, las derivadas parciales son**

continuas y al función T es 1-1, excepto en conjuntos de volumen 0.

2.6 EJEMPLOS

EJEMPLO 2: Calcular la integral:

$\iiint_E y^2 z^2 dx\, dy\, dz$, en donde E es la región acotada por el paraboloide: x = 1 – y^2- z^2 y el plano x = 0.

Solución:

El paraboloide corta al plano en la curva: 0 = 1 – y^2- z^2 o y^2+ z^2 = 1, que es una circunferencia de centro (0,0) y radio 1 en el plano yz. Podemos usar coordenadas cilíndricas: r y θ en el plano yz, y en el otro eje la coordenada x.

Las ecuaciones de transformación son: y = r Cos(θ), z = r Sen(θ), x = x.

La región está determinada por: 0 ≤ θ ≤ 2π, 0 ≤ r ≤ 1, 0 ≤ x ≤ 1 – y^2- z^2 = 1 - r^2.

La integral transformada a coordenadas cilíndricas es:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-r^2} r^2\,\mathrm{Cos}^2(\theta)\,r^2\,\mathrm{Sen}^2(\theta)\,r\,dx\right)dr\right)d\theta,$$

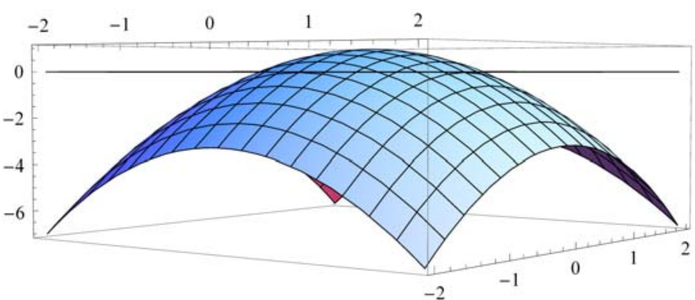
$$r^2\,\mathrm{Cos}^2(\theta)\,r^2\,\mathrm{Sen}^2(\theta)\,r = r^5\,(\mathrm{Cos}(\theta)\,\mathrm{Sen}(\theta))^2 =$$
$$r^5\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sen}(2\,\theta)\right)^2 = \tfrac{r^5}{4}\,\mathrm{Sen}^2(2\,\theta) = \tfrac{r^5}{4}\,(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}(4\,\theta)) = \tfrac{r^5}{8}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta)),$$

$$\int_0^{1-r^2} r^2\,\mathrm{Cos}^2(\theta)\,r^2\,\mathrm{Sen}^2(\theta)\,r\,dx = \int_0^{1-r^2}\tfrac{r^5}{8}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta))\,dx = \tfrac{r^5}{8}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta))\,(1-r^2) =$$
$$\tfrac{1}{8}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta))\,(r^5-r^7).$$

$$\int_0^1 \tfrac{1}{8}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta))\left(r^5-r^7\right)dr = \tfrac{1}{8}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta))\,(\tfrac{r^6}{6}-\tfrac{r^8}{8})|_0^1 = \tfrac{1}{8}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta))\,(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}) = \tfrac{1}{8\,(24)}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta)),$$

$$\int_0^{2\pi}\tfrac{1}{8\,(24)}\,(1-\mathrm{Cos}(4\,\theta))\,d\theta = \tfrac{1}{8\,(24)}(\int_0^{2\pi}1\,d\theta - \int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}(4\,\theta)\,d\theta) = \tfrac{1}{8\,(24)}\,(2\pi-\tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}(4\,\theta)\;4\,d\theta) =$$
$$\tfrac{1}{8\,(24)}\,(2\pi-\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sen}(4\,\theta)\,|_0^{2\pi}) = \tfrac{1}{8\,(24)}\,2\pi = \pi/96.$$

```
Plot3D[{1 - y^2 - z^2, 0}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2}]
```



EJEMPLO 3:

Calcular el volumen del sólido E encerrado por el elipsoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Solución:

Hacemos el cambio de variables: x = au, y = bv, z = cw.

La nueva región S está acotada por: $\frac{a^2\,u^2}{a^2}+\frac{b^2\,v^2}{b^2}+\frac{c^2\,w^2}{c^2}=1$, o sea: $u^2+v^2+w^2=1$,

la circunferencia de centro (0,0,0) y radio 1 en el espacio uvw.

El Jacobiano es: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

El volumen de E es:

$\iiint_{E} 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{S} abc \, du \, dv \, dw = abc \iiint_{S} 1 \, du \, dv \, dw = abc \, (\frac{4}{3} \pi \, 1^3) = \frac{4}{3} \pi \, abc.$