UDLAP®

TALLER DEL CENTRO DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Derivadas de Funciones y sus Aplicaciones

Guillermo Romero Meléndez

Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

1. CALCULANDO DERIVADAS POR LA DEFINICIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

EJEMPLO: Derivar $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}}\,\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{-h}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+h}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}\right)} = \frac{-1}{2\,x^{\frac{3}{2}}}$$

$$D\left[\frac{1}{\sqrt{x}}, x\right]$$

$$-\frac{1}{2\,x^{3/2}}$$

2. DERIVACION UTILIZANDO LA REGLA DE LA CADENA

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$$

EJEMPLO:

Derivar k(x) = Sen (Cot(x))

La aplicación de la regla de la cadena nos da la fórmula :
(Sen (u)) ´ = Cos (u) u´

k´ (x) = Sen´ (Cot (x)) Cot´ (x) = Cos (Cot (x))(-Csc ^{2}(x))

```
D[Sin[Cot[x]], x]
```

$-\text{Cos}[\text{Cot}[x]]\,\text{Csc}[x]^2$

3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

Criterio de la Primera Derivada

La función f(x) tiene un máximo local en un punto crítico c (la derivada es cero o no existe), si la derivada cambia de signo en c de + a -

La función f(x) tiene un mínimo local en un punto crítico c, si la derivada cambia de signo en c de - a +

Criterio de la Segunda Derivada

Si f´(c) = 0 y f´´(c) < 0, f tiene en c un valor máximo local.

Si f´(c) = 0 y f´´(c) > 0, f tiene en c un valor mínimo local.

EJEMPLO:
Calcular los valores máximos y mínimos locales de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$f[x\_] := \frac{x^2}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0,$$

si x = 0, o x = 2 (puntos críticos).

```
D[f[x], x]
```

$$\frac{2x}{-1+x} - \frac{x^2}{(-1+x)^2}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{(-2+x)\,x}{(-1+x)^2}$$

$$\texttt{fp[x\_] :=} \frac{2\,x}{-1+x} - \frac{x^2}{(-1+x)^2}$$

Observamos que f(0) = 0 es un valor máximo local y que f(2) = 4 es un valor mínimo local:

x	-∞	□	0	□	1	□	2	□	∞
f´ (x)	□	+	0	–	□	–	0	+	□
f (x)	□	↗	0	↘	□	↘	4	↗	□

```
fp[-1]
fp[.5]
fp[1.5]
fp[2.5]
```

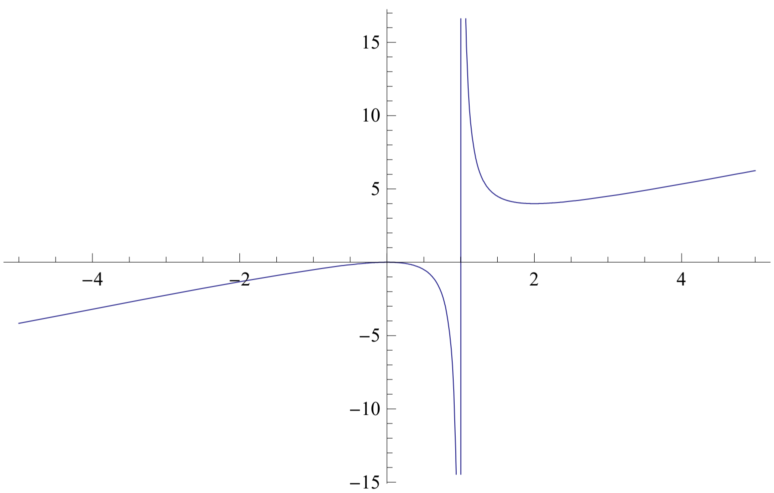
$$\frac{3}{4}$$

-3.

-3.

0.555556

```
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```



Si aplicamos el criterio de la segunda derivada obtenemos:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{x^2-2\,x}{(x-1)^2} = (2\,x-2)\,(x-1)^2 - \left(x^2-2\,x\right)\,2\,(x-1) \big/ (x-1)^4 =$$

$$2\,(x-1)\,(x-1)^2 - 2\,x\,(x-2)\,(x-1) \big/ (x-1)^4 = \frac{2\,(x-1)^2 - 2\,x\,(x-2)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

```
D[f[x], {x, 2}]
```

$$\frac{2}{-1+x} - \frac{4\,x}{(-1+x)^2} + \frac{2\,x^2}{(-1+x)^3}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{2}{(-1+x)^3}$$

Observamos que f ´´(0) = -2 < 0 y por lo tanto f(0) = 0 es un valor máximo local y que f ´´(2) = 2 > 0 y por lo tanto f(2) = 4 es un valor mínimo local.

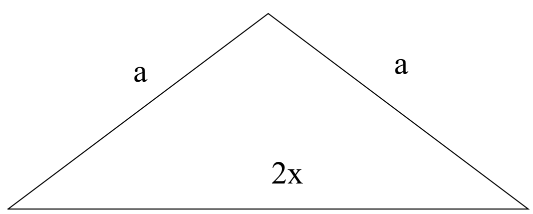
■ 4. MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

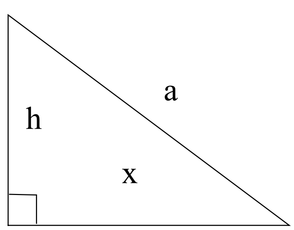
Si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a,b], existen sus valores máximos y mínimos absolutos, y se encuentran en los puntos críticos, o en a o en b.

El método para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos consiste en evaluar la función f(x) en los puntos críticos, en a y en b. El valor más alto corresponde al valor máximo y el menor al valor mínimo de f(x).

EJEMPLO: Entre los triángulos isósceles con dos lados de longitud a, hallar el triángulo con la mayor área.

Podemos considerar que el otro lado tiene longitud 2x. Por simetría sus ángulos opuestos son iguales y se divide en dos triángulos rectángulos iguales.





El área del triángulo inicial es dos veces el área del tríangulo rectángulo mostrado:
Usando que el área de un triángulo es un medio de la base por la altura, y por el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$A(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)(\text{base})(\text{altura}) = x\,h = x\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 x^2 - x^4},\ x \in [0, a]$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\frac{2a^2 x - 4x^3}{\sqrt{a^2 x^2 - x^4}} = 0,\ \text{si } 0 = 2a^2 x - 4x^3 = 2x\left(a^2 - 2x^2\right).$$

Las soluciones son : $x = 0,\ x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$A(0) = 0$$

$$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2}\ (\text{Valor Máximo})$$

$$A(a) = 0$$

Observamos que el triángulo obtenido no es equilátero.

5. REGLA DE L´HÔPITAL

Caso 1: $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$.

Si $f'(x) / g'(x) \to L$, entonces $f(x) / g(x) \to L$

Caso 2: $f(x) \to \infty$ o $-\infty$ y $g(x) \to \infty$ o $-\infty$.

Si $f'(x) / g'(x) \to L$, entonces $f(x) / g(x) \to L$

Se cumple para todos los tipos de límites: en un punto, laterales, al infinito, y vale también si $L = \infty$ o $L = -\infty$

EJEMPLO 5.1 : Calcular

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$f(x) = x \operatorname{Tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\operatorname{Tan}\left[\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}}$$

Como el numerador y el denominador tiendan a 0, podemos derivar arriba y abajo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{Tan}\left[\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{Sec}^2\left[\frac{1}{x}\right]\left(-1/x^2\right)}{\left(-1/x^2\right)} = \lim_{x \to \infty} \operatorname{Sec}^2\left[\frac{1}{x}\right] = \operatorname{Sec}^2[0] = 1$$

$$\operatorname{Limit}\left[x \operatorname{Tan}\left[\frac{1}{x}\right], x \to \infty\right]$$

1

EJEMPLO 5.2 : Calcular

$$\lim_{x \to \infty} g(x)$$

$$g(x) = \left(e^x + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\operatorname{Ln}(g(x)) = \frac{1}{x} \operatorname{Ln}\left(e^x + x^2\right) = \frac{\operatorname{Ln}\left(e^x + x^2\right)}{x}$$

Mientras el numerador y el denominador tiendan a ∞, podemos derivar arriba y abajo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{Ln}\left(e^x + x^2\right)}{x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{e^x + 2x}{e^x + x^2}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Como aplicamos logaritmo natural,
para cancelarlo aplicamos la exponencial al resultado y obtenemos : $e^1 = e$

$$\operatorname{Limit}\left[\left(e^x + x^2\right)^{\frac{1}{x}}, x \to \infty\right]$$

e