
TALLER DEL CENTRO DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS**Demostraciones de Límites****Guillermo Romero Meléndez****Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas**■ **1. LIMITES EN UN PUNTO**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$

EJEMPLO 1. Demostrar :

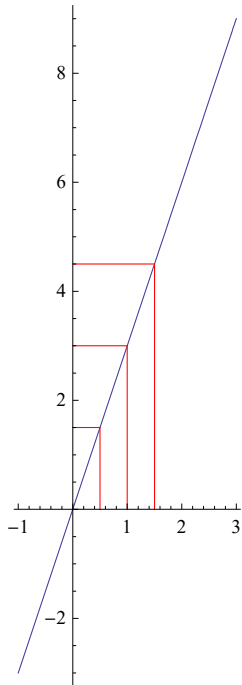
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$x \rightarrow 1$$

$$f(x) = 3x$$

Sea $\epsilon > 0$, encontremos $\delta > 0$ tal que $|3x - 3| < \epsilon$ si $0 < |x - 1| < \delta$.

$$|3x - 3| = |3(x - 1)| = 3|x - 1| < \epsilon, \\ \text{si } |x - 1| < \epsilon/3 = \delta.$$



EJEMPLO 2. Demostrar :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

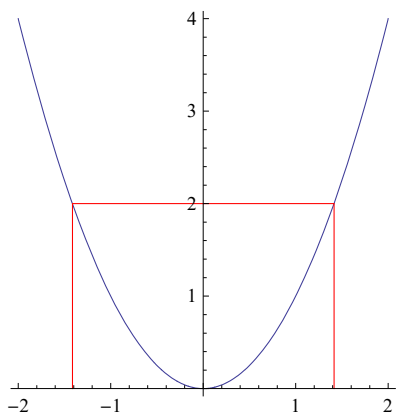
$$x \rightarrow 0$$

$$g(x) = x^2$$

Sea $\epsilon > 0$, encontremos $\delta > 0$ tal que $|x^2 - 0| < \epsilon$ si $0 < |x - 0| < \delta$.

$$|x^2 - 0| = |x^2| = x^2 = |x|^2 < \epsilon,$$

$$\text{si } |x| < \sqrt{\epsilon} = \delta.$$



EJEMPLO 3. Demostrar :

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$g(x) = x^2$$

Sea $\epsilon > 0$, encontremos $\delta > 0$ tal que $|x^2 - 1| < \epsilon$ si $0 < |x - 1| < \delta$.

$$|x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| = |x+1| |x-1|$$

Si $|x-1| < 1$, $-1 < x-1 < 1$, $0 < x < 2$, $1 < x+1 < 3$, $|x+1| < 3$

Por lo tanto

$$|x^2 - 1| = |x+1| |x-1| < 3 |x-1| < \epsilon,$$

si $|x-1| < \epsilon/3$ y $|x-1| < 1$

$$\delta = \text{Min}\{1, \epsilon/3\}$$

■ 2. LÍMITES EN EL INFINITO

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $x > M$

EJEMPLO. Demostrar :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

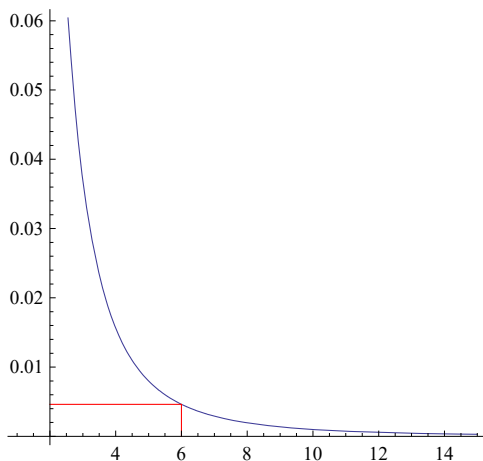
$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Sea $\epsilon > 0$, encontremos $M > 0$ tal que $\left| \frac{1}{x^3} - 0 \right| < \epsilon$ si $x > M$.

Si $x > 0$,

$$\left| \frac{1}{x^3} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x^3} \right| = \frac{1}{x^3} < \epsilon,$$

$$\text{si } \frac{1}{\epsilon} < x^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon}} < x. \text{ Por lo tanto } M = \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon}}$$



■ 3. LÍMITES INFINITOS

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $f(x) > M$ si $0 < |x - a| < \delta$

EJEMPLO.

Demostrar : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$

$$f(x) = \left| \frac{1}{x-2} \right|$$

$$f(x) = \left| \frac{1}{x-2} \right|$$

Sea $M > 0$, encontremos $\delta > 0$ tal que $\left| \frac{1}{x-2} \right| > M$ si $0 < |x-2| < \delta$

$$\left| \frac{1}{x-2} \right| > M \Leftrightarrow \frac{1}{|x-2|} > M \Leftrightarrow \frac{1}{M} < |x-2|, \delta = \frac{1}{M}$$

Herramientas

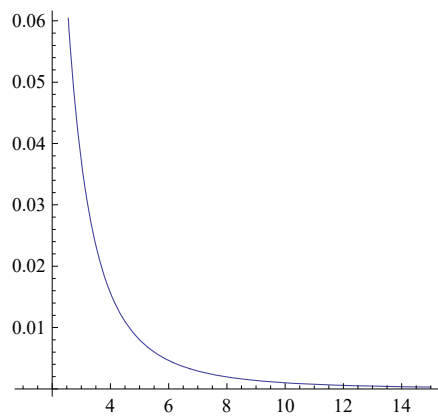
```
In[1]:= f[x_] := 1 / (x^3)
```

```
In[2]:= G1 = Graphics[{Red, Line[{{6, 0}, {6, f[6]}]}];
G2 = Graphics[{Red, Line[{{6, f[6]}, {2, f[6]}]}];
```

```
In[4]:= Show[G1, G2]
```

```
Out[4]=
```

```
Plot[f[x], {x, 1, 15}, AspectRatio -> 1 / 1.1]
```



```
Show[%, %%]
```

