TALLER DEL CENTRO DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Demostraciones de *Límites*

Guillermo Romero Meléndez

Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

1. LIMITES EN UN PUNTO

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$

EJEMPLO 1. Demostrar :

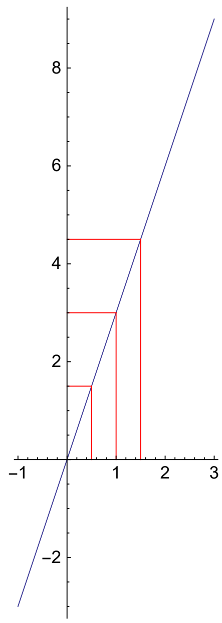
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

$$f(x) = 3x$$

Sea $\epsilon > 0$, encontremos $\delta > 0$ tal que $|3x - 3| < \epsilon$ si $0 < |x - 1| < \delta$.

$$|3x - 3| = |3(x - 1)| = |3|\,|x - 1| = 3\,|x - 1| < \epsilon,$$

si $|x - 1| < \epsilon/3 = \delta$.



EJEMPLO 2. Demostrar :

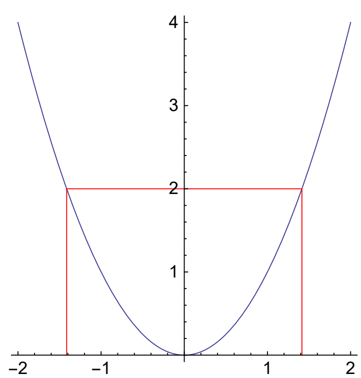
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

$$g(x) = x^2$$

Sea $\epsilon > 0$, **encontremos** $\delta > 0$ **tal que** $\left| x^2 - 0 \right| < \epsilon$ **si** $0 < |x - 0| < \delta$.

$$\left| x^2 - 0 \right| = \left| x^2 \right| = x^2 = |x|^2 < \epsilon,$$

si $|x| < \sqrt{\epsilon} = \delta$.



EJEMPLO 3. Demostrar :

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 1$$

$$g(x) = x^2$$

Sea $\epsilon > 0$, encontremos $\delta > 0$ tal que $\left| x^2 - 1 \right| < \epsilon$ si $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left| x^2 - 1 \right| = \left| (x+1)(x-1) \right| = |x+1|\,|x-1|$$

Si $|x - 1| < 1$, $-1 < x - 1 < 1$, $0 < x < 2$, $1 < x + 1 < 3$, $|x + 1| < 3$

Por lo tanto

$$\left| x^2 - 1 \right| = |x+1|\,|x-1| < 3\,|x-1| < \epsilon,$$

si $|x - 1| < \epsilon/3$ y $|x - 1| < 1$

$$\delta = \underbrace{\text{Min}}_{\text{mínimo}}\{1, \epsilon/3\}$$

2. LIMITES EN EL INFINITO

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$, tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $x > M$

EJEMPLO. Demostrar :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

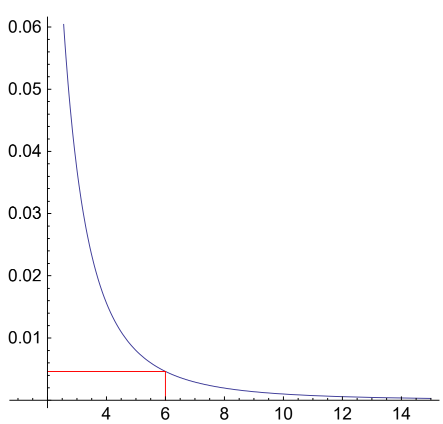
$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Sea $\epsilon > 0$, **encontremos** $M > 0$ **tal que** $\left|\frac{1}{x^3} - 0\right| < \epsilon$ **si** $x > M$.

Si $x > 0$,

$$\left|\frac{1}{x^3} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3} < \epsilon,$$

$$\text{si } \frac{1}{\epsilon} < x^3 \iff \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon}} < x. \text{ Por lo tanto } M = \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon}}$$



3. LIMITES INFINITOS

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Para todo M > 0 existe δ > 0, tal que f(x) > M si 0 < |x - a| < δ

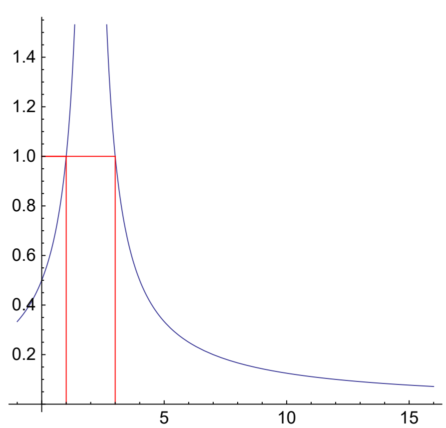
EJEMPLO.

Demostrar : $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$

$$f(x) = \left|\frac{1}{x-2}\right|$$

Sea $M > 0$, **encontremos** $\delta > 0$ **tal que** $\left|\frac{1}{x-2}\right| > M$ **si** $0 < |x-2| < \delta$

$$\left|\frac{1}{x-2}\right| > M \Longleftrightarrow \frac{1}{|x-2|} < M \Longleftrightarrow \frac{1}{M} < |x-2|, \ \delta = \frac{1}{M}$$



4. OTROS EJEMPLOS

4.1 Demostrar:

$$\lim_{x \to a} 1/x = \frac{1}{a}, \text{ si } a \neq 0.$$

Sea $\epsilon > 0$,
encontremos $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-x}{a\,x}\right| = \frac{|a-x|}{|a\,x|} = \frac{|x-a|}{|a|\,|x|} = |x-a|\,\frac{1}{|a|\,|x|}$$

Acotemos el término $\frac{1}{|a|\,|x|}$ tomando un δ provicional.

Si $|x - a| < \frac{|a|}{2}$, como $\left||x| - |a|\right| \leq |x - a|$,
entonces $\left||x| - |a|\right| < \frac{|a|}{2}$
y se tiene, quitando un valor absoluto :

$$-\frac{|a|}{2} < |x| - |a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow |a| - \frac{|a|}{2} < |x| < |a| + \frac{|a|}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{|a|}{2} < |x| < \frac{3\,|a|}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{|a|^2}{2} < |a|\,|x| < \frac{3\,|a|^2}{2} \Rightarrow \frac{2}{|a|^2} > \frac{1}{|a|\,|x|}.$$ Así se tiene :

$$|x-a|\,\frac{2}{|a|^2} > |x-a|\,\frac{1}{|a|\,|x|}.$$ Por lo tanto :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < |x-a|\,\frac{2}{|a|^2} < \epsilon,$$
si $|x - a| < \epsilon\,\frac{|a|^2}{2}$ y $|x - a| < \frac{|a|}{2}$.

Elegimos $\delta = \min\left\{\frac{|a|}{2}, \epsilon\,\frac{|a|^2}{2}\right\}$.

4.2 Demostrar:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} 1/f(x) = 1/L, \text{ si } L \neq 0.$$

Sea $\epsilon > 0$,

encontremos $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$

Por la definición, sabemos que para todo $\epsilon' =$

$k > 0$ (a elegir después), existe $\delta' > 0$ tal que

$\left| f(x) - L \right| < k$, si $0 < \left| x - a \right| < \delta'$

$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| =$

$\left|\frac{L - f(x)}{L f(x)}\right| = \frac{|L - f(x)|}{|L f(x)|} = \frac{|f(x) - L|}{|L| |f(x)|} = |f(x) - L| \frac{1}{|L| |f(x)|}$.

Acotemos el término $\frac{1}{|L| |f(x)|}$

tomando una primera condición para k :

Como $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < k$,

entonces $||f(x)| - |L|| < k$

y se tiene, quitando un valor absoluto :

$-k < |f(x)| - |L| < k$

$\Rightarrow |L| - k < |f(x)| < |L| + k$. Si $k < \frac{|L|}{2}$, se tiene :

$-k > -\frac{|L|}{2} \Rightarrow |L| - k > |L| - \frac{|L|}{2} \Rightarrow$

$\frac{|L|}{2} = |L| - \frac{|L|}{2} < |L| - k < |f(x)|$. Así se tiene :

$\frac{|L|}{2} < |f(x)| \Rightarrow \frac{|L|^2}{2} < |L| |f(x)| \Rightarrow$

$\frac{2}{|L|^2} > \frac{1}{|L| |f(x)|}$. Por lo tanto :

$|f(x) - L| \frac{2}{|L|^2} > |f(x) - L| \frac{1}{|L| |f(x)|}$ y se tiene :

$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| =$

$|f(x) - L| \frac{1}{|L| |f(x)|} < |f(x) - L| \frac{2}{|L|^2} < \epsilon$,

si $|f(x) - L| < \epsilon \frac{|L|^2}{2}$.

Esto se cumple si k satisface también : $k < \epsilon \frac{|L|^2}{2}$.

Elegimos entonce $k < \min\left\{\frac{|L|}{2}, \epsilon \frac{|L|^2}{2}\right\}$ y $\delta = \delta'$.

4.3 Demostrar el caracter local del límite:

Si f(x) y g(x) son iguales en un intervalo de radio $\delta 1$, con x≠a y

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Sea $\epsilon > 0$,

encontremos $\delta > 0$ tal que $|g(x) - L| < \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$

Por la definición,

como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sabemos que existe $\delta' > 0$ tal que

$|f(x) - L| < \epsilon$, si $0 < |x - a| < \delta'$.

Ahora tenemos dos intervalos alrededor de a,
uno con radio $\delta 1$, donde f y g son iguales,
y otro con radio δ' donde
$|f(x) - L| < \epsilon$. Tomemos la
intersección de los dos intervalos,
la cual es un intervalo con el radio más pequeño :
$\delta = \min\{\delta 1, \delta'\}$. En ese intervalo
ocurren las dos cosas :
f y g son iguales y $|f(x) - L| < \epsilon$.
Expresado esto en símbolos, se tiene :

Si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $0 <$
$|x - a| < \delta 1$ y $0 < |x - a| < \delta'$, por lo tanto :

$|g(x) - L| = |f(x) - L| < \epsilon$.

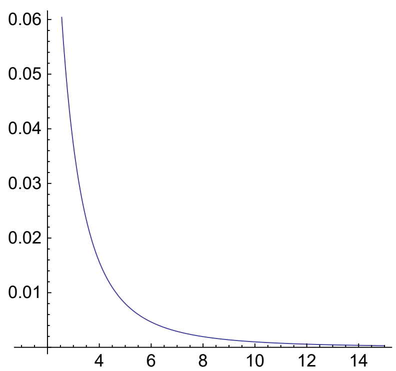
Herramientas

```
f[x_] := 1/(x^3)
```

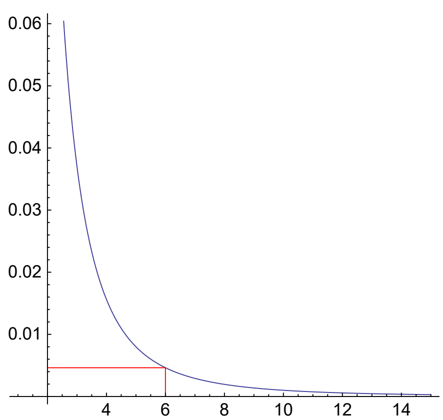
```
G1 = Graphics[{Red, Line[{{6, 0}, {6, f[6]}}]}];
     gráfico      rojo  línea
G2 = Graphics[{Red, Line[{{6, f[6]}, {2, f[6]}}]}];
     gráfico      rojo  línea
```

```
Show[G1, G2]
muestra
```

```
Plot[f[x], {x, 1, 15}, AspectRatio → 1/1.1]
representación gráfica  cociente de aspecto
```

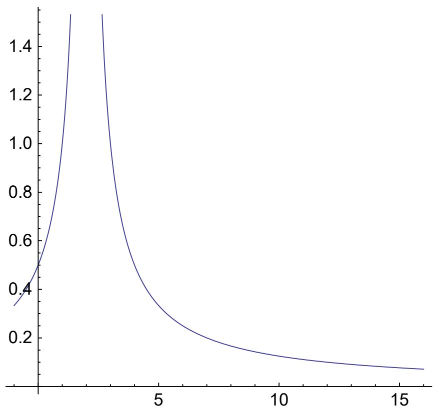



```
Show[%, %%]
muestra
```




```
f[x_] := Abs[1/(x - 2)]
         valor absoluto
```

```
Plot[f[x], {x, -1, 16}, AspectRatio → 1/1.1]
```
representación gráfica · cociente de aspecto



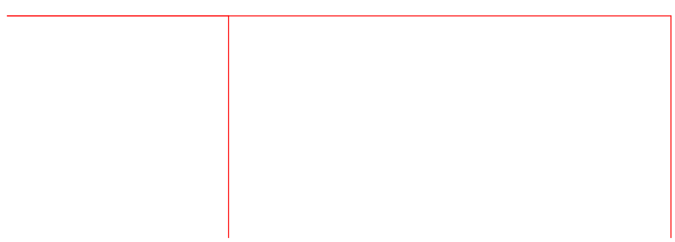

```
G1 = Graphics[{Red, Line[{{1, 0}, {1, f[1]}}]}];
```
gráfico · rojo · línea

```
G2 = Graphics[{Red, Line[{{1, f[1]}, {0, f[1]}}]}];
```
gráfico · rojo · línea

```
G3 = Graphics[{Red, Line[{{3, 0}, {3, f[3]}}]}];
```
gráfico · rojo · línea

```
G4 = Graphics[{Red, Line[{{3, f[3]}, {0, f[3]}}]}];
```
gráfico · rojo · línea

```
Show[G1, G2, G3, G4]
```
muestra



```
Show[%, %%]
```

muestra