UDLAP®

TALLER DEL CENTRO DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Límites de Funciones y su Visualización
Guillermo Romero Meléndez
Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

1. LIMITES EN UN PUNTO

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

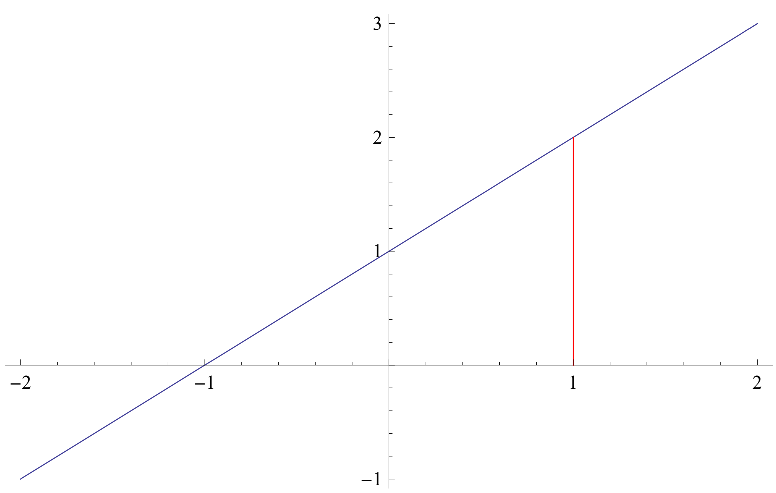
La función f(x) se acerca al valor L, cuando x se acerca al punto a.

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 1} g(x)$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1$$

$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$



2. LIMITES EN EL INFINITO

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

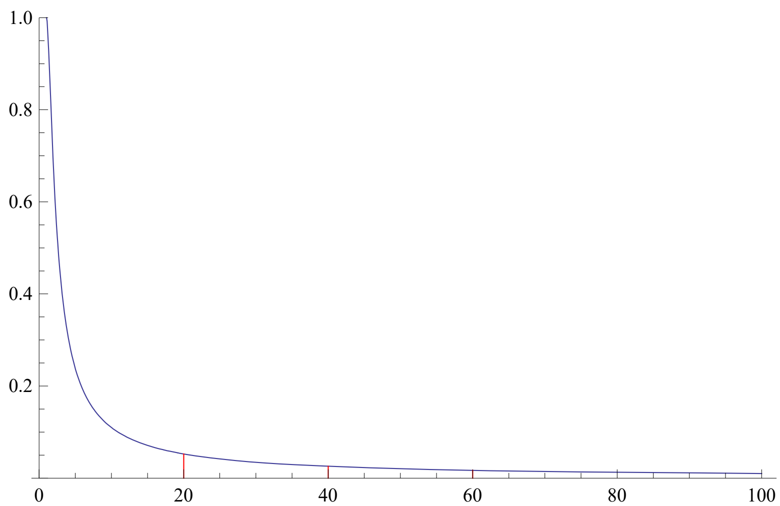
La función f(x) se acerca al valor L, cuando x toma valores cada vez más grandes.

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 + 1} = \frac{(x^2 + x)/x^3}{(x^3 + 1)/x^3} = \frac{1/x + 1/x^2}{1 + 1/x^3} \to \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$



- **3. LIMITES LATERALES**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

La función f(x) se acerca al valor L, cuando x se acerca al punto a, por valores mayores que a

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

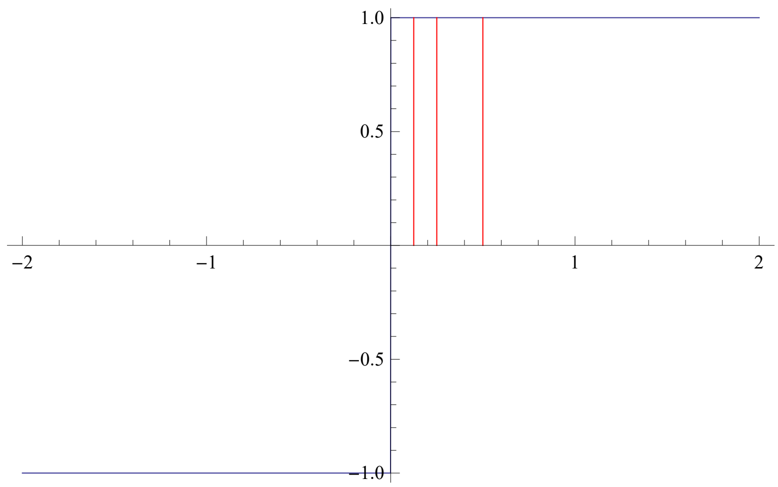
La función f(x) se acerca al valor L, cuando x se acerca al punto a, por valores menores que a

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x)$$

$$h(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$$



- **4. LIMITES INFINITOS**

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

La función f(x) toma valores cada vez más grandes, cuando x se acerca al punto a.

EJEMPLO:

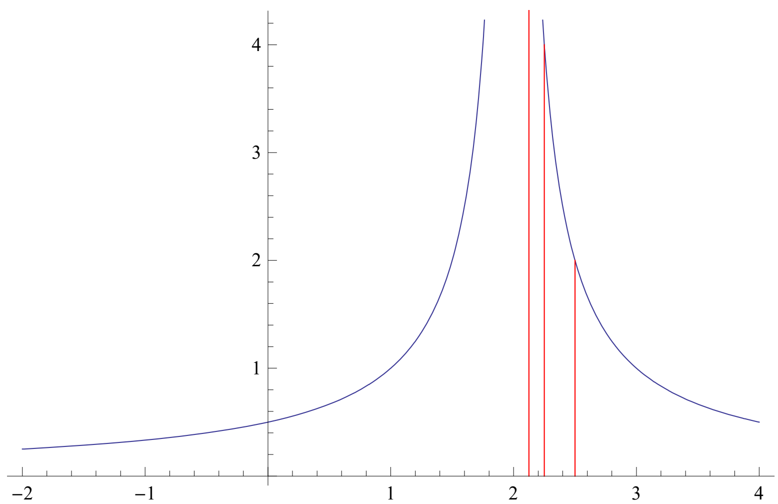
$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

$$f(x) = \left|\frac{1}{x-2}\right| = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{si } x > 2 \\ \frac{-1}{x-2}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si $x \to 2^+$, $\frac{1}{x-2} \to = \infty$, porque $1 \to 1$ y $x - 2 \to 0^+$

Si $x \to 2^-$, $\frac{-1}{x-2} \to = \infty$, porque $-1 \to -1$ y $x - 2 \to 0^-$

Por lo tanto, $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$



■ 5. OTROS EJEMPLOS

EJEMPLO 5.1 :

$$\lim_{x \to 3} g(x)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2}$$

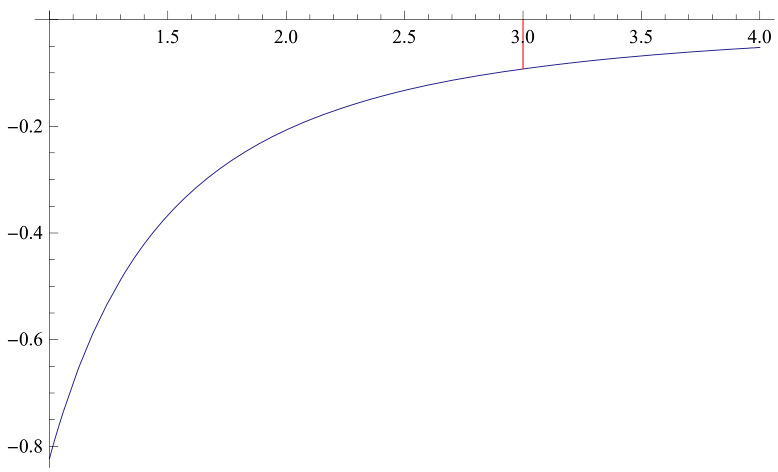
$$\frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2} = \frac{\left(\sqrt{x+6} - x\right)\left(\sqrt{x+6} + x\right)}{\left(x^3 - 3x^2\right)\left(\sqrt{x+6} + x\right)} = \frac{(x+6) - x^2}{\left(x^3 - 3x^2\right)\left(\sqrt{x+6} + x\right)} =$$

$$\frac{-\left(x^2 - x - 6\right)}{\left(x^3 - 3x^2\right)\left(\sqrt{x+6} + x\right)} = \frac{-(x-3)(x+2)}{x^2 (x-3)\left(\sqrt{x+6} + x\right)} = \frac{-(x+2)}{x^2\left(\sqrt{x+6} + x\right)} \to \frac{-5}{54}$$

$$\lim_{x \to 3} g(x) = \frac{-5}{54}$$

```
Limit[(Sqrt[x + 6] - x)/(x^3 - 3 x^2), x → 3]
```

$$-\frac{5}{54}$$



EJEMPLO 5.2 :

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1} - x$$

$$\sqrt{x^2+4x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+4x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x+1} + x\right)} =$$

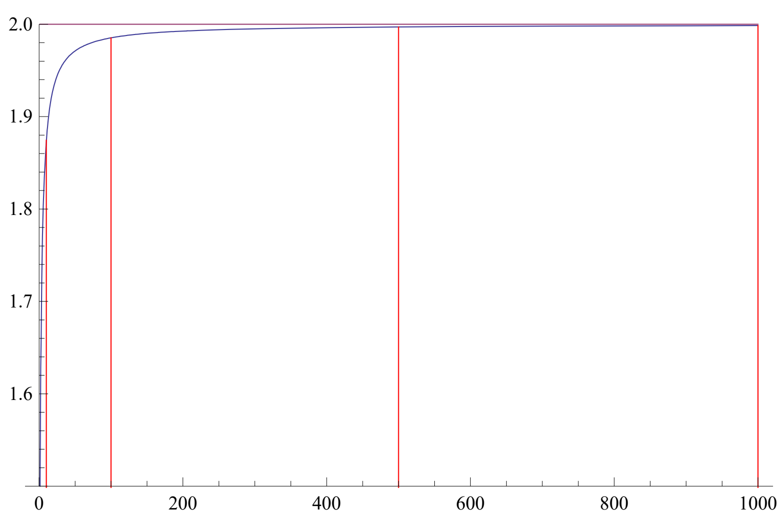
$$\frac{\left(x^2+4x+1\right) - x^2}{\sqrt{x^2+4x+1} + x} = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1} + x} = \frac{(4x+1)/x}{\left(\sqrt{x^2+4x+1} \Big/ \sqrt{x^2}\right) + (x/x)} =$$

$$\frac{4 + (1/x)}{\sqrt{\left(x^2+4x+1\right)/x^2} + 1} = \frac{4 + (1/x)}{\sqrt{1 + 4(1/x) + \left(1/x^2\right)} + 1} \to \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

```
Limit[Sqrt[x^2 + 4 x + 1] - x, x → Infinity]
```

2



EJEMPLO 5.3 :

$$\lim_{x \to 1} h(x)$$

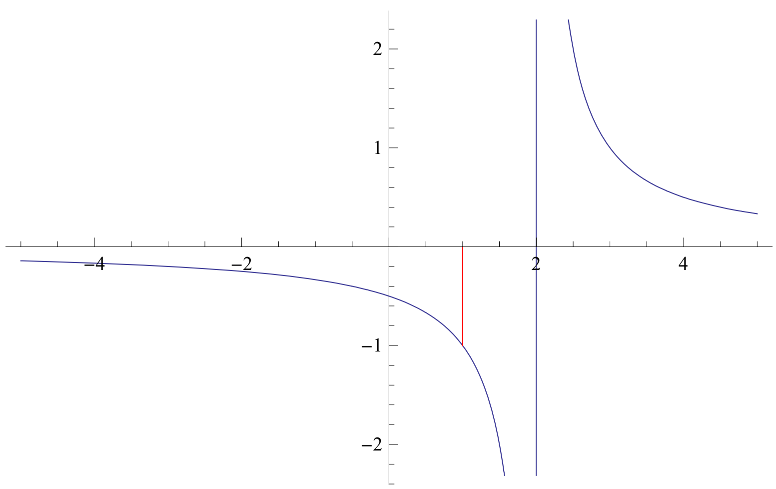
$$h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-2)+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} \to \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \to 1} h(x) = -1$$

$$\text{Limit}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2},\ x \to 1\right]$$

-1



EJEMPLO 5.4 :

$$\lim_{x \to 0^+} h(x)$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\tan(y) = \frac{1}{x},$$

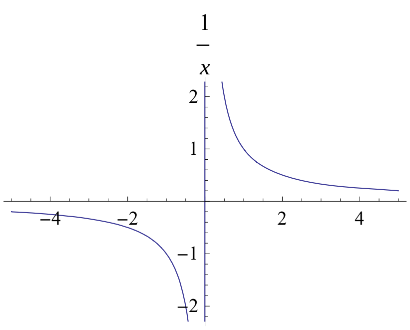
Si $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to \infty$, por lo tanto $\tan(y) \to \infty$,

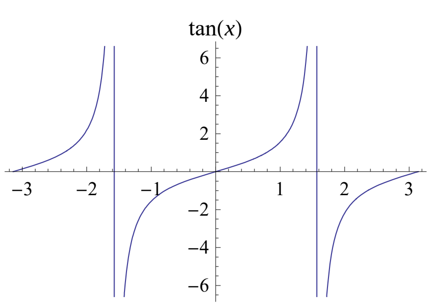
$\tan(y) \to \infty$, si $y \to \frac{\pi}{2}$

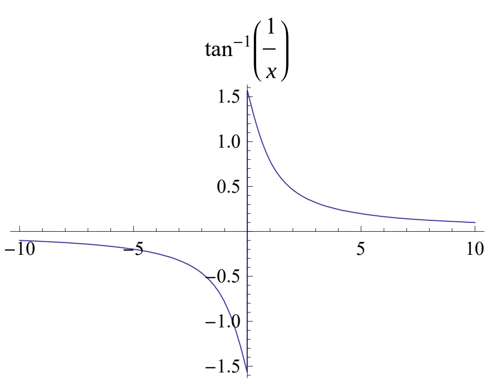
$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$$

```
Limit[ArcTan[1 / x], x → 0]
```

$$\frac{\pi}{2}$$







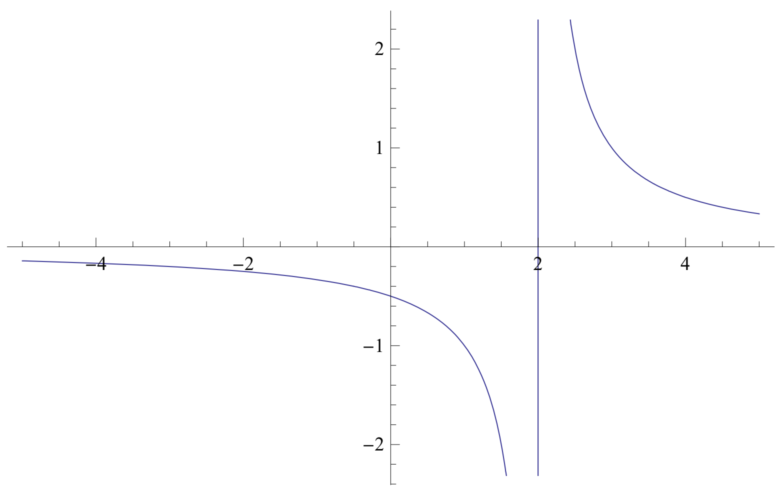
Herramientas

$$\texttt{k[x\_] :=} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

```
Graphics[{Red, Line[{{1, 0}, {1, -1}}]}]
```



```
Plot[k[x], {x, -5, 5}]
```




```
Show[%, %%]
```