



Taller del Centro de Aprendizaje de Matemáticas UDLAP

“Todo lo que quisiste saber sobre las gráficas definidas por partes y nunca te atreviste a preguntar”

Profesora: Dra. Luz María García Ávila
Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

La idea de este taller es dar un enfoque distinto al estudio de las funciones y se apoya en un material donde algunas funciones están hechas en fomi y van sobre dos planos cartesianos plastificados que se pegan en el pizarrón. La idea es entender qué es una función y construirla en lugar de sólo dibujarla.

El material que se presenta ahora es sólo la parte que se explica durante el taller, la parte más importante es cuando los estudiantes ayudados con el material construyen las funciones.

¿Qué es una función?

Formalmente una función es una relación especial entre dos conjuntos. Así la definición de función tiene 3 ingredientes importantes:

- el conjunto de inicio que se le llama Dominio
- el conjunto de salida que se le llama Rango
- la regla de definición de la función

Cuando hablamos de que la relación es una relación especial nos referimos a que cada vez que un elemento del conjunto Dominio entra a la función sólo sale un elemento de salida. No todas las relaciones que se pueden establecer entre dos conjuntos tienen esta propiedad. Piense en el siguiente ejemplo: el conjunto de inicio son todas las madres biológicas que tuvieron hijos desde el 1900 hasta la fecha y el conjunto de salida todos los humanos que nacieron desde el 1900. La relación que podemos establecer entre estos dos conjuntos es la siguiente: dada una madre del conjunto inicial le asignamos o relacionamos

sus hijos biológicos. Note que aquellas madres que han tenido más de un hijo entonces están relacionadas con más de un humano.

Una manera ilustrativa de pensar en una función es pensarla como una maquina donde la materia prima es el conjunto de inicio y los productos ya procesados es el conjunto de salida. Si la máquina está definida como cada vez que entre un número sale su cuadrado tenemos:

- entra 2 a la máquina y sale el 4
- entra 3 a la máquina y sale 9

Note que el conjunto de entrada son todos los números que conocemos pero en la salida no son todos, por ejemplo, piense ¿cómo podría salir -4?

Ahora, como las máquinas que conocemos imagine que tenemos una máquina que hace pan, entonces puede entrar como materia prima harina, pero qué ¿cree que suceda si mete clavos? Obviamente la máquina dará un signo de error.

Piense en el siguiente ejemplo: la máquina está definida así, dado un número que entra a la máquina nos devuelve su recíproco, así tenemos por ejemplo:

- si entra el 3 devuelve $\frac{1}{3}$
- si entra el 25 devuelve $\frac{1}{25}$

Aquí entonces nos hacemos una pregunta qué pasa si a la máquina metemos el 0. Sí, así como en el caso de meter clavos a la máquina de pasteles ésta máquina nos dará un error pues $\frac{1}{0}$ NO es un número.

Vamos a poner en lenguaje matemático la definición de las máquinas. Una máquina más compleja que las anteriores la definimos así, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$, note que ahora lo que entra y sale de ésta máquina es más complejo porque tenemos que tomar en cuenta las dos partes que hacen la definición de la máquina. ¿Si a esta máquina entra un número a que es positivo mayor que cero? ¿Qué es lo que nos devuelve ésta máquina?

¿Qué es una función definida por partes?

Las funciones definidas por partes son aquellas que cuando se explican en los cursos básicos de matemáticas presentan una dificultad mayor, pero son necesarias porque forman una fuente de ejemplos que van a servir para otros cursos, por ejemplo, Cálculo o Análisis.

Siguiendo con la idea de las máquinas podemos pensar que las funciones definidas por partes son máquinas donde entra la materia prima pero la máquina la separa en casos, es decir, si es un tipo de materia prima especial lo procesa de una manera y si es de otro tipo de otra forma.

Ejemplo: Imagine que la máquina está definida en la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 3; \\ -2 & \text{si } x < 3; \end{cases}$$

Note que a ésta máquina entra como materia prima todos los números que conocemos porque no tiene ninguna restricción, pero como conjunto salida solo hay dos opciones: sale el 2 o bien el -2.

Imagine que entra el número 4 a la máquina entonces antes de ser procesado la máquina piensa, bueno 4 es mayor o igual a 3 o bien 4 es menor que 3. Usted ya tiene la respuesta, como 4 es mayor o igual a 3 entonces a 4 lo va a relacionar con 2. Si ahora a la máquina entra el número -1, ¿qué devuelve la máquina?. Una pregunta un poco más difícil, si yo le digo que tengo un número x donde sólo sé de él que es mayor que el número 10 si lo meto a la máquina ¿puede decirme qué nos devolverá al entrar?

Ejemplos

Aquí se le pide a los estudiantes que construyan con el material las funciones definidas por partes.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0; \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2; \\ 1 & \text{si } -2 < x < 2; \\ -2 & \text{si } x > 2; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2; \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 < x < 2; \\ 3 & \text{si } x > 2; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0; \\ 3 & \text{si } x \geq 0; \end{cases}$$